**8. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости**

**8.1 Расстояние между двумя точками**

Рассмотрим прямоугольную систему координат (декартовую, рис. 8).

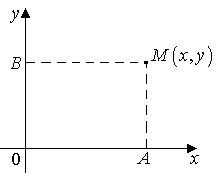


Рис. 8

Любой точки  соответствуют координаты - абсцисса,- ордината точки , то есть каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел и наоборот.

Теорема. Для любых двух точек  и  плоскости расстояние  между ними определяется формулой:

. (81)

* 1. **Площадь треугольника**

Теорема. Для любых точек  не лежащих на одной прямой (рис.9), площадь  выражается формулой:

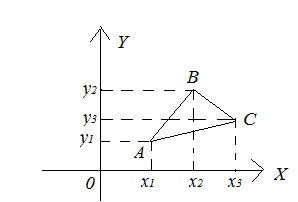


Рис. 9

.

 (82)

Например, известна площадь треугольника , заданного вершинами : . Найти значение неизвестной координаты .

Решение. Составим определитель, используя формулу вычисления площади треугольника (82):

,

, , .

Ответ: , .

* 1. **Деление отрезка в данном отношении**

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок  и любая точка  принадлежащая отрезку .

Пусть отношение . В отношении  точка  делит отрезок (рис. 10).

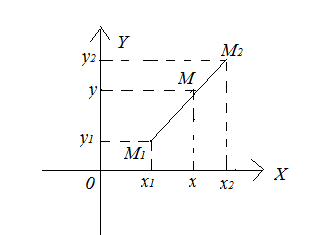


Рис. 10

Теорема. Если точка  делит отрезок  в отношении , то координаты этой точки определяются по формулам:

, (83)

где .

Следствие: если  - середина , то

 (84)

Например, пусть точка  делит отрезок в отношении . Найти координаты точки , если .

Решение. Подставим известные координаты точек  и  в формулы (83):

, .

, .

Ответ: 

* 1. **Полярные координаты**

Полярная система координат состоит из некоторой точки  называемой полюсом, и исходящего из нее луча  называемой полярной осью (рис. 11). Задается масштаб для измерения длин отрезков.

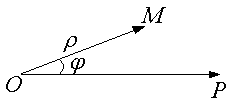


Рис. 11

Любая точка  в полярной системе характеризуется расстоянием

 ( - полярный радиус, ) и углом поворота луча 

от оси  ( - полярный угол, ).

Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

* 1. **Связь декартовых и полярных координат**

Пусть начало прямоугольной системы совпадает с полярным полюсом, ось  совпадает с полярной осью (рис.12).

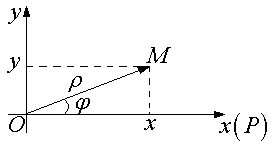


Рис. 12

Тогда для точки справедливо равенство: . Из треугольника получим уравнения связи координат:

 (85)

 (86)

* 1. **Преобразования прямоугольных координат**

На плоскости обычно исследуется следующие преобразования прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот осей координат.

а) При параллельном переносе осей координат изменяется положение начала координат, направление осей координат не меняется.

Рассмотрим переход системы координат (старая) в систему (новая) (рис.13).

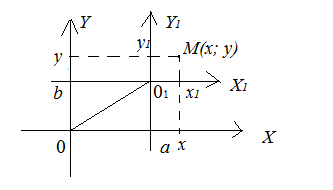


Рис. 13

Пусть точки  и точка в старой системе имеет координаты , . В новой системе  точка  имеет координаты: . Тогда формулы перехода:

1. от «старых» координат в «новые» имеют вид :

  (87)

1. от «новых» координат к «старым»:

  (88)

б) При повороте осей координат начало системы координат не меняется, а оси поворачиваются на один и тот же угол. Пусть система координат повернута относительно начала координат на угол . Рассмотрим переход системы координат  в систему координат . Точка в системе перейдет в точку  в системе (рис. 14).

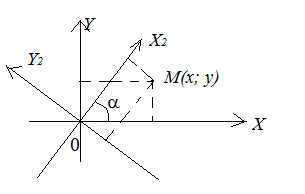


Рис. 14

Тогда формулы перехода

1. от «старых» координат в «новые» имеют вид:

  (89)

1. от «новых» координат к «старым»:

****  (90)

Например, определить координаты точки  в новой системе координат , если начало  находится в точке , а оси новой системы координат параллельны осям старой системы координат.

Решение: используем формулы (87):



Ответ: точка  в новой системе координат.

Рассмотрим следующую задачу: отрезок , где точка , повернут на угол 600. Найти координаты точки  в новой системе координат.

Решение: используем формулы (89):





Ответ:  в новой системе координат.

* 1. **Упражнения**

1. Построить в прямоугольной системе координат точки, заданные в полярной системе координат: ; ; ; .

2. Написать в полярных координатах уравнения линий:

1); 2); 3); 4) ; .

3. Записать уравнение в полярных координатах  в прямоугольных координатах, определить ее вид и построить кривую.

4. Определить середины сторон треугольника с вершинами 

5. Вычислить площадь треугольника, заданного вершинами 

6. Даны точки На оси определить точку так, чтобы площадь треугольника была равна 10.

1. **Уравнение линии на плоскости**
   1. **Определение линии**

Пусть на плоскости  задана прямоугольная система координат и некоторая линия (кривая) .

Уравнением линии  на плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты и  каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой другой, не лежащей на этой линии:

, (91)

то есть линия – это множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (91).

Уравнение линии можно задать:

1. в прямоугольной системе координат: ; (92)
2. в параметрической форме: , где - параметр; (93)
3. в полярной системе координат: . (94)

Линия называется линией - ого порядка, если она определяется уравнением -ой степени относительно текущих прямоугольных координат. Линия первого порядка называется прямой.

Углом наклона прямой к оси называется наименьший неотрицательный угол , на который следует повернуть ось , чтобы ее положительное направление совпадало с одним из направлений прямой.

* 1. **Уравнение прямой на плоскости**

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть задана прямая под углом  к оси (рис. 15).

Тангенс угла наклона прямой к оси называется угловым коэффициентом прямой

(95)

. Рассмотрим треугольник . Найдем отношение сторон из треугольника 



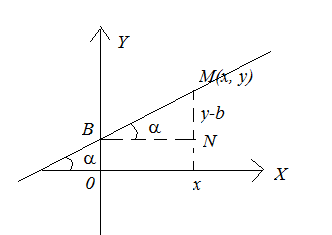


Рис. 15

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

 (96)

Если , то прямая параллельна оси если , то прямая проходит через начало координат, если  прямая параллельна оси .

2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку.

Пусть задана точка , принадлежащая прямой . Подставим координаты точки в уравнение: . Выразим свободный член . Тогда уравнение примет вид:

 (97)

3) Уравнение прямой, проходящее через две точки.

Пусть заданы две точки и  принадлежащие прямой . Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой (97):  Выразим коэффициент  Уравнение прямой будет иметь вид:

 (98)

4) Уравнение прямой в отрезках.

Пусть задана прямая, отсекающая на осях и отрезки и  Точки и принадлежат прямой, заданной уравнением (98) (рис.16).

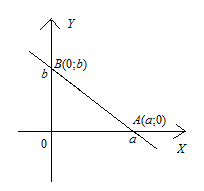


Рис. 16

Подставим координаты точек в уравнение прямой, получим уравнение прямой в отрезках:

 (99)

5) Каноническое уравнение прямой.

Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через две точки (98). Введем вектор  принадлежащий прямой:

 (100)

Этот вектор или ему параллельный называют направляющим вектором прямой. Тогда уравнение прямой примет вид:

 (101)

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

6) Параметрическое уравнение прямой.

Приравняем уравнение прямой (101) к параметру . Получим пару параметрических уравнений прямой:

 (102)

7) Общее уравнение прямой.

В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени:

 , (103)

где произвольные числа, причем одновременно не равны нулю. Угловой коэффициент прямой имеет вид:

 (104)

При отсутсивии какого-либо коэффициента в уравнении прямой получаются неполные уравнения прямой:

1.  - прямая, проходящая через начало координат;
2.  – прямая, параллельная оси 
3.  – прямая, параллельная оси 
4.  – ось 
5.  - ось 

8) Нормальное уравнение прямой.

Пусть задана некоторая прямая. Через начало координат проведем перпендикуляр к прямой . Этот перпендикуляр называется нормалью к прямой и обозначается  (  - единичный вектор номали). Пусть нормаль  с осью  образует угол  (). Введем параметр : . Рассмотрим точку , совмещая прямоуголную и полярную системы координат (

(, рис. 17).

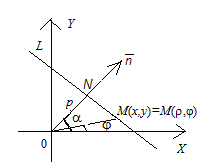


Рис. 17

Из  получим:





В результате получим нормальное уравнение прямой

 (105)

* 1. **Расстояние между точкой и прямой**

Пусть задана прямая  и точка . Зададим прямую в виде нормального уравнения (105). Проведем через точку  прямую , параллельную заданной прямой . Пусть точки  и  лежат по одну сторону от начала координат (рис 18).

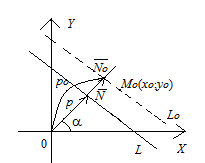


Рис. 18

Векторы  и коллинеарны. Пусть . Оценим расстояние между прямыми:

 (106)

Формула (106) позволяет вычислить расстояние от точки до прямой.

Если уравнение прямой задано общим уравнением (103), то его можно перевести в нормальное уравнение прямой, введя нормирующий множитель:

 (107)

Знак множителя определяется так:

а) если , то  - положительный;

б) если , то  - отрицательный.

Нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

 (108)

а расстояние между точкой и прямой можно вычислить по формуле:

 (109)

Например, найдем расстояние от точки  до прямой :



* 1. **Взаимное расположение прямых на плоскости**

Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде:



Возможны следующие взаимные положения прямых:

1. прямые пересекаются:

а) точкой пересечения прямых является общее решение системы двух уравнений:

 (110)

при условии, что главный определитель системы не равен нулю

 или соблюдается условие  (111)

б) угол φ между прямыми можно найти, если известны угловые коэффициенты прямых:





Тогда угол можно найти по формуле:

 (112)

в) условие перпендикулярных прямых:

 (113)

1. прямые параллельные, если система уравнений (110) не имеет решения, т.е.

 или соблюдается условие  (114)

можно условие параллельности записать, используя равенство нулю угла между прямыми:

 (115)

1. прямые совпадают при соблюдении условия:

 (116)

**9.5 Упражнения**

1. Заданы точки . Какие из них лежат на одной прямой?
2. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки равно 10.
3. Заданы координаты вершин треугольника    . Найти а) уравнения сторон треугольника и их длины; б) уравнение высоты, проведенной из вершины  и ее длину; в) точку пересечения медиан, опущенных на стороны  и ; г) площадь треугольника.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку , и перпендикулярной прямой .
5. Составить уравнение прямой, точки которой равноотстоят от двух данных точек:  и .
6. Прямая, проходящая через точку , отсекает на оси ординат отрезок длиной 6 единиц. Найти расстояние от этой прямой до начала координат.
7. Найти проекцию точки на прямую .
8. Через точку провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях координат, и найти площадь полученного треугольника.
9. В треугольнике с вершинами найти все углы, определить вид треугольника, найти его площадь. Записать систему уравнений, определяющих область треугольника.
10. Найти уравнения, параллельной и перпендикулярной прямых, проходящих через точку , относительно прямой .

**10. Плоскость и прямая в пространстве**

* 1. **Уравнение поверхности**

Пусть в прямоугольной системе координат  задана произвольная поверхность  и уравнение

 (117)

Уравнение (108) называется уравнением поверхности в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, принадлежвщей поверхности, и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не принадлежащей поверхности. Степень уравнения определяет порядок поверхности. Поверхность первого порядка называется плоскостью.

* 1. **Общее уравнение плоскости**

Пусть в прямоугольной системе координат  задана произвольная плоскость , точка и вектор  Рассмотрим произвольную точку  (рис.19).

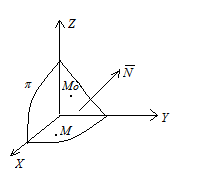


Рис. 19

Построим вектор  Он принадлежит плоскости , следовательно, перпендикулярен вектору  и скалярное произведение этих векторов равно нулю:



 (118)

Мы получили уравнение плоскости, проходящей через точку  перпендикулярно вектору , который называется вектором нормали или номальным вектором.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим общее уравнение плоскости:

 (119)

Решим задачи: а) составтиь уравнение плоскости, проходящей через

точку  перпендикулярно вектору  б) для плоскости  определить координаты нормального вектора.

Решение: а) воспользуемся формулой (118), получим уравнение плоскости:





б) Определим координаты нормального вектора плоскости:

вектор 

**10.3 Нормальное уравнение плоскости**

Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

 (120)

В уравнении (120)  - углы, которые вектор нормали образует с осями координат, параметр - это расстояние от плоскости до точки начала координат ( рис.20).

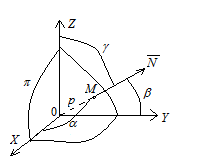


Рис. 20

Если ввести единичный вектор нормали, то нормальное уравнение плоскости можно записать в виде:

 (121)

 (122)

Знак нормируещего множителя определяется так:

а) если , то  - положительный;

б) если , то  - отрицательный.

**10.4 Уравнение плоскости в отрезках**

Пусть задано нормальное уравнение плоскости (120). Представим уравнение иначе:





 (123)

параметры - это отрезки, которые плоскость отсекает на осях координат (рис.21).

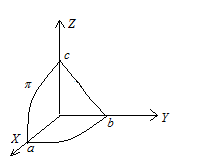


Рис. 21

**10.5 Расстояние от точки до плоскости**

Пусть плоскость задана уравнением общего вида: 

Точка  Расстояние от точки , не принадлежащей плоскости (рис. 22), до самой плоскости можно найти, используя нормальное уравнение плоскости (120). Пусть точка - проекция точки на плоскость точки  - проекции точек ки  на вектор :



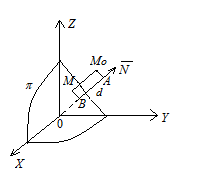


Рис. 22

 (124)

или

 (125)

**10.6 Угол между плоскостями**

Пусть заданы две плоскости и :

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

Угол  между плоскостями (рис. 21) можно найти как угол между векторами 

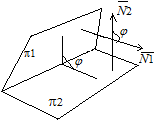


Рис. 23

 (126)

Например, определить угол между плоскостями: 

Решение: Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:



**10.7 Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей**

Пусть заданы две плоскости и :

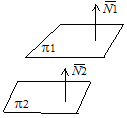
Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

1. Условие перпендикулярности плоскостей, то есть скалярное произведение векторов равно нулю:

 (127)

1. Условие параллельности плоскостей (рис.24), то есть соответсвующие координаты векторов пропорциональны:

Р

 (128)

Рис. 24

**10.8 Неполные уравнения плоскости**

Пусть задано уравнение плоскости: 

Если один из коэффициентов уравнения равен нулю, мы получим неполное уравнение плоскости:

1)  - плоскость, проходящая через начало координат;

2) - плоскость параллельна оси 

3) - плоскость параллельна оси 

4) - плоскость параллельна оси 

5) - плоскость параллельна плоскости 

6) - плоскость параллельна плоскости 

7) - плоскость параллельна плоскости 

8) - плоскость 

9) - плоскость 

10) - плоскость 

**10.9 Уравнения прямой в пространстве**

Линией в пространстве называется множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и определяется системой уравнений:

 (129)

Система двух уравнений плоскости в пространстве, у которых нормальные вектора  неколлинеарные, называется общим уравнением прямой в пространстве (рис. 25):

  (130)

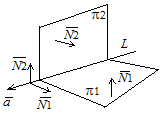


Рис. 25

Вектор, параллельный прямой в пространстве, или принадлежащий

самой прямой, называется направляющим вектором прямой:



Пусть точки и . Тогда вектор  и  следовательно, координаты векторов пропорциональны (рис. 26):

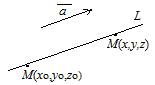


Рис. 26

 (131)

Уравнение (131) называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Общее уравнение прямой (130) можно перевести в каноническое уравнение (131). Пусть две плоскости пересекаются по прямой Нормальные вектора плоскостей перпендикулярны и прямой, следовательно прямая перпендикулярна нормальным векторам: . Выберем любой вектор (рис. 25).

Тогда вектор  является векторным произведением векторв 

.

Точку, принадлежащую прямой, можно найти, задав одну из координат произвольно. После подстановки этой координаты в систему уравнений (130) получим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Например, переведем общее уравнение прямой



в каноническую форму.

Решение: 1) Найдем нормальные вектора плоскостей 

2) Найдем направляющий вектор прямой



1. Пусть  Тогда  найдем из системы:



Ответ: каноническое уравнение прямой: 

Если уравнение (131) приравнять к некоторому параметру , то получим параметрическое уравнение прямой:

 (132)

Если заданы две точки прямой , то уравнение прямой, проходящее через две точки, можно записать так:

 (134)

**10.10 Взаимное расположение прямых в пространстве**

Пусть заданы две прямые в канонической форме :

Для каждой из них запишем направляющий вектор   Возможны следующие взаимные расположения прямых:

1) прямые пересекаются под углом  Угол  между прямыми можно найти как угол между векторами 

 (135)

2) прямые перпендикулярные (рис. 27), 

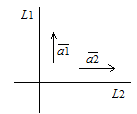


Рис. 27

 (136)

3) прямые параллельные (рис. 28), 

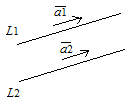


Рис. 28

 (137)

**10.11 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве**

Пусть заданы прямая и плоскость в пространстве:

Для прямой найдем направляющий вектор  а для плоскости найдем нормальный вектор  Возможны следующие случаи расположения прямой и плоскости в пространстве:

1. пересечение под углом  (рис. 29): угол  между прямой и плоскостью заменим углом между направляющим и нормальным

векторами: 

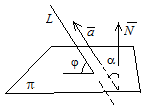


Рис. 29

 (138)

2) прямая и плоскость параллельны,  (рис.30):

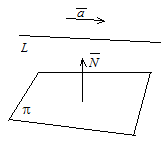


Рис. 30

 (139)

1. прямая и плоскость перпендикулярны, (рис.31):

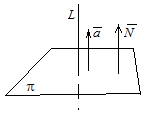


Рис. 31

 (140)

1. прямая и плоскость пересекаются в точке . Для

определения точки пересечния прямой и плоскости переведем уравнение прямой в параметрическую форму и подставим координаты в уравнение плоскости:





Из полученного уравнения найдем параметр  и вычислим координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Например, найти точку пересечения прямой 

и плоскости 

Решение: составим параметрическое уравнение прямой: 

Подставим значения координат в уравнение плоскости:



Найдем координаты точки пересечения плоскости и прямой:



Ответ: точка  - точка персечения прямой и плоскости.

**10.12 Расстояние от точки до прямой в пространстве**

Пусть задана прямая и точка  ей не принадлежащая (рис.32).

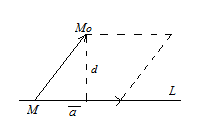


Рис. 32

На прямой выберем произвольную точку  Рассмотрим векторы  и  Построим на этих векторах параллелограмм. Тогда высота параллелограмма будет определять расстояние от точки до прямой:

 (141)

Например, найти расстояние от точки  до прямой:



Решение: найдем направляющий вектор прямой: За точку, принадлежащую прямой, примем точку Составим вектор 

Найдем векторное произведение векторов 



Найдем площадь параллелограмма как модуль векторного произведения:



По формуле (141) найдем расстояние от точки до прямой:



**10.13 Упражнения**

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  перпендикулярно прямой .

2. Найти угол, образованный плоскостью  с осью .

3. Найти угол между плоскостями , 

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки  и .

5. Найти направляющие косинусы прямой (т.е. направляющие косинусы направляющего вектора прямой) 

6. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку  параллельно оси .

7. Привести уравнение прямой в каноническую форму и найти длину направляющего вектора.

8. Найти угол между плоскостью и прямой Найти точку их пересечения.

9. Найти расстояние от точки  до плоскости  и прямой .

10. Заданы вершины пирамиды , , , . Найти: а) уравнения граней пирамиды; б) площадь основания ; в) длину и уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины ; г) объем пирамиды; д) уравнение прямой, проходящей через вершину , параллельно грани .

11. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: 

**11. Кривые второго порядка**

* 1. **Окружность**

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом, называется окружностью.

Пусть центр окружности находится в точке . Точка принадлежит окружности. Тогда



 (142)

Если центр окружности находится в точке , то уравнение окружности запишется так

 (143)

Например, составить уравнение окружности, проходящей через три точки 

Решение. Составим систему уравнений с тремя неизвестными: *а*, *b* – координаты центра окружности, *R* – радиус окружности. Заменив текущие координаты уравнения (143) координатами заданных точек, получим:



Решив систему, получим искомое уравнение окружности:



* 1. **Эллипс**

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через  и  фокусы эллипса,  Сумму расстояний от любой точки  до точек  и  обозначим через  (рис. 33).

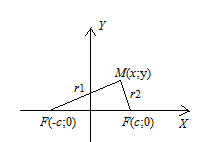


Рис. 33

Числа и  называются фокальными радиусами.По определению эллипса получим уравнение:









Пусть 

 (145)

Полученное уравнение эллипса называется каноническим.

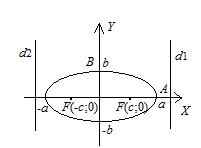


Рис. 34

Основные свойства эллипса (рис. 34):

1. эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат;
2. оси координат называются осямиэллипса; начало координат называется центром эллипса;
3. точки пересечения эллипса с осями симметрии эллипса образуют вершины эллипса ( точки *А* и *В*);
4. если , то  называется большей полуосью эллипса,  называется малой полуосью эллипса (  – большая и малая оси эллипса);
5. если , то фокусы эллипса находятся на оси  если , то фокусы находятся на оси 
6. если то эллипс вырождается в окружность;
7. связь между полуосями и расстоянием между фокусами определяется формулой:

 (146)

1. эксцентриситетомэллипса называется отношение расстояния между фокусами к большей оси эллипса:

 (147)

Свойства эксцентриситета:

1) так как  то 

2) 

3) эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль оси, на которой находятся фокусы: при  эллипс сильно вытянут вдоль оси, при  эллипс похож на окружность;

9. директрисами эллипса называются прямые, перпендикулярные большей оси эллипса и проходящие на расстоянии ли  от центра эллипса (проходят за фокусами эллипса, ):

 (148)

10. теорема: если  – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение  – есть величина постоянная, равная эксцентриситету; так как  то директрисы находятся за пределами эллипса.

Например, составить уравнение эллипса, если задана точка  принадлежащая эллипсу, и его эксцентриситет 

Решение. Подставим координаты заданной точки в уравнение эллипса: 

Используем понятие эксцентриситета:  найдем квадрат выражения:  и оценим  Подставим найденное значение в выражение Подставим  в уравнение эллипса. Найдем значения полуосей и получим искомое уравнение эллипса: 

1. **3 Гипербола**

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через фокусы гиперболы,. Сумму расстояний от любой точки до точек обозначим через : . Числа называются фокальными радиусами (рис. 33).По определению гиперболы получим уравнение:

*,* пусть







Пусть 

 (149)

Полученное уравнение гиперболы называется каноническим.

Основные свойства гиперболы (рис. 35):

1. гипербола симметрична относительно осей и начала координат. Оси симметрии называются осями гиперболы, центр симметрии называется центро**м** гиперболы;
2. одна из осей симметрии пересекает гиперболу в двух точках, которые называются вершинами;
3. ось, на которой находятся вершины гиперболы называется

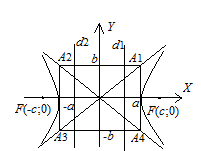


Рис. 35

действительной осью (– действительная полуось), другая ось называется мнимой( ***–*** мнимая полуось);

1. прямоугольник со сторонами  *и* называется основным прямоугольником гиперболы;
2. фокусы гиперболы находятся на действительной оси;
3. связь между полуосями и расстоянием между фокусами

 (150)

1. гипербола, определяемая уравнением

 (151)

называется сопряженной; у сопряженной гиперболы фокусы находятся на оси  и 

1. прямые, заданные уравнениями:

 (152)

называются асимптотамигиперболы; асимптоты – это диагонали главного прямоугольника гиперболы;

1. эксцентриситетомгиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси гиперболы:

 (153)

Свойства эксцентриситета:

1) так как , то ;

2) 

10**.** директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии  от центра гиперболы (директрисы проходят между фокусами гиперболы):

 (154)

11. теорема: если – расстояние от произвольной точки  гиперболы до какого-нибудь фокуса, – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение – есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Например, установить какую кривую задает уравнение:



Решение. Перепишем уравнение в виде: 

Возведем уравнение в квадрат, получим:



Выделяя полный квадрат для переменной *x*, получим искомое

уравнение:



Это уравнение определяет гиперболу с центром в точке, полуосями  фокусами, находящимися на оси, параллельной оси 

* 1. **Парабола**

Параболойназывается множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки , называемой фокусом, и от данной прямой , называемой директрисой, не проходящей через фокус (рис. 36).

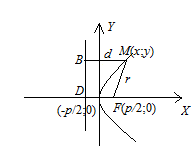


Рис. 36

Пусть если  - фокальный радиус,  – параметр параболы*,* точка  – фокус параболы, точка D имеет координаты и принадлежит директрисе параболы 

По определению параболы получим: 



 (155)

Полученное уравнение называется каноническим уравнением параболы. Аналогично можно вывести уравнения вида:

 (156)

Свойства параболы:

1. парабола симметрична относительно оси *ОХ;*
2. точка является центром параболы; ось симметрии  является осью параболы;
3. – параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Например, составить уравнение прямой, которая касается параболы перпендикулярна к прямой .

Решение. Уравнение искомой прямой перпендикулярно данной, следовательно, ее угловой коэффициент равен 2, уравнение имеет вид: . Прямая касается параболы, следовательно, имеет с ней одну общую точку, которую можно определить из системы уравнений:

Получим уравнение: .

Из условия , получим значение .

Искомое уравнение имеет вид:

**11.5 Общее уравнение линии второго порядка**

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

(157)

– числа, причем – одновременно не нули. Составим квадратичную форму из коэффициентов уравнения:

(158)

Пусть . По знаку ∆ можно определить вид кривой:

1. если , уравнение (157) относится к эллиптическому виду;
2. если , уравнение (157) относится к гиперболическому виду;
3. если , уравнение (157) относится к параболическому виду.

Справедлива лемма: Пусть в прямоугольной системе координат *ХОУ*

задано уравнение (157) и пусть . Тогда с помощью параллельного переноса и поворота осей координат уравнение (157) примет вид:

 (159)

- числа,  - координаты в новой системе координат.

Координаты нового начала координат после параллельного переноса можно вычислить по формулам:

; . (160)

С учетом параллельного переноса свободный член уравнения вычисляется по формуле:

 (161)

Получим новое уравнение:  (162)

Угол поворота осей координат можно найти, зная тангенс угла поворота:

(163)

Зная угол поворота осей координат, оценим коэффициенты уравнения кривой:





В результате получим коэффициенты уравнения (159).

Теорема. Пусть в прямоугольной системе координат задано уравнение

(157). Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение примет вид:

1.  эллипс;
2. мнимый эллипс;
3. – пара мнимых прямых;
4. – гипербола;
5. – пара пересекающихся прямых;
6. – парабола;
7. – пара параллельных прямых;
8. – пара мнимых параллельных прямых;
9. – пара совпадающих прямых.

Например, определить вид кривой в зависимости от параметра λ:

.

Раскроем скобки в уравнении: . Составим и оценим параметр λ:

1. , эллипс;
2. , гипербола;
3. , парабола.

Получим эти кривые:

1.  при ;
2.  при и и при ;
3.  .при 

**11.6 Упражнения**

1. Найти координаты центра  и радиус  окружности .

2. Написать уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: ; .

3. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и директрисы: а) эллипса ; б) гиперболы . Построить эти кривые.

4. Написать каноническое уравнение эллипса и гиперболы, если фокусы их находятся на оси , большая полуось эллипса равна действительной полуоси гиперболы и равна радиусу окружности , фокусное расстояние эллипса равно 6, а для гиперболы в два раза больше.

5. Написать каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно 8.

6. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы .

7. Найти расстояние между фокусами параболы  и эллипса

.

8. Определить вид кривой и построить ее:

1);

2);

3);

4);

5) .

9. Написать уравнение эллипса, если известны координаты вершин ,  и одного из фокусов .

10. Найти расстояние от центра окружности  до вершины параболы .

**12. Вопросы по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии**

1. Определитель и его свойства. Минор. Алгебраическое дополнение. Вычисление определителей любого порядка.
2. Матрицы. Действия с ними. Обратная матрица. Ранг матрицы. Теорема о ранге, его вычисление.
3. Решение систем линейных уравнений. Совместность. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем по методу Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. Однородные и неоднородные системы. Фундаментальные системы решений однородных систем линейных уравнений.
4. Векторы. Операции над векторами. Проекция вектора на ось. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их геометрический смысл.
5. Линейное векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность, базис векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Норма пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональные и ортонормированные базисы.
6. Линейные операторы и действия над ними. Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Квадратичные формы в *n*-мерном пространстве, их виды. Критерий Сильвестра.
7. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости, уравнения прямой. Угол между прямыми на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.
8. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнений прямой и плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью в пространстве. Взаимное расположение прясых, плоскостей, прямой и плоскости в пространстве.
9. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.
10. **Примерный экзаменационный билет**
11. Матрицы, операции над матрицами.
12. Окружность и ее свойства.
13. Составить уравнения окружностей, касающихся двух данных прямых  и  и имеющих радиус 5.
14. Составить каноническое уравнение эллипса, если прямые  являются директрисами, а малая полуось равна 2.
15. Найти  угла между векторами  и 
16. Составляют ли векторы  базис?
17. Решить систему уравнений .
18. **Контрольная работа**

При выполнении контрольной работы вместо параметров *M* и *N* подставляем две последние цифры зачетки.

1. Решить систему линейных уравнений тремя методами: методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса:



1. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:



1. Найти собственные числа и собственные вектора матриц:

а)  б) 

1. Заданы четыре точки в пространстве: Найти:

1) длины векторов ;

2) координаты векторов ;

3) проверить компланарность векторов ;

4) уравнения прямых ;

5) уравнение плоскости

6) расстояние от точки до плоскости ;

7) угол между векторами ;

8) уравнение медианы, проведенной из точки на сторону треугольника ;

9) уравнение перпендикуляра, опущенного на сторону из точки треугольника ;

10) площадь треугольника ;

11) координаты точки пересечения медиан треугольника ;

12) объем пирамиды и ее высоту, опущенную на основание треугольника .

1. Заданы четыре точки на плоскости Найти:

1) уравнения прямых ;

2) точки пересечения прямых

3) уравнение прямой, проходящей через точки пересечения прямых ;

4) уравнение прямой, перпендикулярной прямой и параллельной прямой , проходящих через точку ;

5) угол между прямыми ;

6) уравнение эллипса, проходящего через точки ;

7) уравнение окружности с центром в точке и радиусом ;

8) уравнение гиперболы, симметричной относительно оси и начала координат, имеющей полуоси ;

9) фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис полученной гиперболы;

10) уравнение параболы, центр которой находится в точке С, а фокус находится в точке . Построить все полученные кривые второго порядка.

1. Определить вид кривой второго порядка

4.

1. Найти матрицу квадратичной формы и определить ее знак. Если возможно привести ее к каноническому виду:

а) ;

б) .

1. В базисе заданы векторы , , и вектор Выразить вектор в базисе векторов
2. Пусть известны данные о дневной производительности двух предприятий, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также время работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья. Составить все матрицы задачи: матрицу норм расхода сырья, матрицы стоимости сырья, стоимости доставки сырья, плана выпуска продукции предприятиями, матрицу производительности труда на каждом предприятии. Найти:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья; 3) дневной расход по типам сырья на предприятиях;

4) годовую потребность сырья для каждого предприятия;

5**)** годовую сумму необходимого кредитования каждого предприятия для закупки сырья;

6) матрицу затрат сырья;

7) общую стоимость сырья;

8) матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции;

9) объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья (данные задачи заданы в табл.7):

*Таблица 7*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| продук-  ция | производительность | | затраты сырья | | | | план вы-пускапрод. |
| Iпредпр. | IIпредпр. |  | |  |  |
|  | *4* | *2M* | 2 | | 5 | 3 | *10N+10M* |
|  | *N* | *3* | 3 | | 3 | 2 | *20(M+N)* |
|  | *M* | *8* | 1 | | 2 | 6 | *NM* |
|  | кол-во рабочих дней | | цена вида сырья | | | |  |
|  | 15 | 20 | *N* | *M* | | *12* |  |
|  |  |  | стоимость доставки сырья | | | |  |
|  |  |  | 2N | N+M | | 3M |  |

**Литература**

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Кремер Н.Ш. и др.]; под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.
4. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1986, - 304 с. Ч. 1.

Учебное пособие

**Окунева Галина Леонидовна**

**Линейная алгебра и аналитическая геометрия**

Учебное пособие для студентов заочной формы обучения с применением дистанционных технологий специальности 080100.62

Подписано в печать Формат 6084/16 Усл.печ.л. Уч.-изд.

Тираж экз. Заказ Цена